

O USO DO GPS NA DETERMINAÇÃO DE ALTITUDES ORTOMÉTRICAS

Prof. Dr. José Milton Arana

Unesp/FCT - Pres.Prudente
Depto. de Cartografia
19060-900 Presidente Prudente SP
jarana@prudente.unesp.br

RESUMO

O *Global Positioning System* – GPS revolucionou, e continua revolucionando, os métodos de levantamentos geodésicos, topográficos e outros posicionamentos. As altitudes geométricas, proporcionadas pelo GPS, possuem apenas significado matemático (referenciadas ao elipsóide de referência), no entanto, as utilizadas em obras de engenharia são as altitudes ortométricas, isto pelo fato de possuírem significado físico. A determinação de altitudes ortométricas a partir do GPS pressupõe o conhecimento da ondulação geoidal – **N**. Atualmente, o *software* MapGeo versão Beta, programa de interpolação de ondulação geoidal do mapa Versão 1998, espera-se uma precisão absoluta de 1,5 m; o Geóide Gravimétrico do Estado de São Paulo proporciona precisão absoluta de, aproximadamente, 1,0 m. Verifica-se que esta ordem de precisão não satisfaz a maioria dos levantamentos altimétricos. Neste trabalho, realizou-se rastreamento GPS em Referências de Nível – RNs, determinadas pela Fundação Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE.

Palavras Chaves: altitude geométrica, altitude ortométrica, ondulação geoidal, GPS

ABSTRACT

The Global Positioning System – GPS make revolution in the geodetic, topographic others positioning measurements methods. The geometric heights from GPS, have only mathematics means (ellipsoid reference), the heights used in engineering is orthometric heights, this because this one have physical means. The orthometrics heights from GPS implies in knowledge geoidal undulation – **N**. Nowadays, software MapGeo Beta version, interpolation program geoidal charts version 1998, have accuracy 1,5 m; the São Paulo State Gravimetric Geoid 1,0 m accuracy. This precision order no satisfy the altimetric measurements. In this paper, Reference Level RN's determined from Institut Brasileiro Geography and Statistic Fundation – IBGE.

Keywords: geometric height, orthometric height, geoidal undulation, GPS

1 INTRODUÇÃO

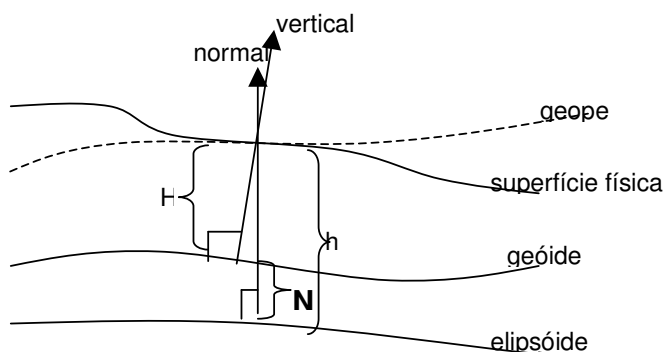
O **NAVigation System with Time And Ranging/Global Positioning System** – NAVSTAR/GPS é um sistema de rádio-navegação, desenvolvido e realizado pelo United States Department of Defense e NASA (Andrade, 1998). O sistema obteve um rápido crescimento em aplicabilidade e em popularidade posicionamento. O GPS tem sido amplamente usado em levantamentos geodésicos, topográficos, e nos mais diversos usos de posicionamentos e navegação.

A capacidade de obter posição relativa com alta precisão na altimetria, impôs a necessidade de um melhor conhecimento das ondulações do geóide (**N**) de modo a compatibilizar a determinação da altitude geométrica (**h**) com a altitude ortométrica (**H**). Assim, com o advento do GPS, o conhecimento do geóide deixou de ser importante apenas no posicionamento horizontal, mas tornou-se importantíssimo no posicionamento vertical.

A forma do geóide está diretamente relacionada ao campo da gravidade da Terra. No entanto, o elipsóide é uma superfície matemática com a forma e dimensões próximas ao geóide e utilizado nos levantamentos geodésicos como uma superfície de referência no posicionamento horizontal. Estas superfícies, geralmente, não são coincidentes e nem paralelas e esta separação entre a superfície do geóide e a do elipsóide é denominada como ondulação ou separação geoidal. Esta ondulação pode atingir até dezenas de metros. A inclinação dessas superfícies, em casos extremos é de 1' (um minuto de arco) (Gemael, 1999).

Na grande maioria dos trabalhos de posicionamento em obras de engenharia, levantamentos geodésicos e topográficos, faz-se necessária a determinação da altitude ortométrica (altitude referenciada ao geóide). Surge então a necessidade de transformar a altitude geométrica, obtida do GPS, em altitude ortométrica. Esta transformação, do ponto de vista matemático, constitui-se numa operação simples, envolvendo a altitude geométrica e a altura geoidal no ponto. Conforme pode ser visto na figura 01, as altitudes ortométricas e as geométricas estão relacionadas por: (AYHAN, 1993)

$$H \approx h - N \quad (01)$$



Aranaf 01: Altitudes geométrica e ortométrica

onde,

H - altitude ortométrica;
h - altitude geométrica; e
N - ondulação do geóide.

Neste trabalho, as ondulações geoidais foram realizadas com rastreamento GPS sobre as RNs. Com este procedimento, em todas as RNs rastreadas, poderão ser determinadas as alturas geoidais derivadas do GPS associado ao nivelamento. De posse destas ondulações, investigou-se a possibilidade da aplicação do GPS na determinação da altitude ortométrica.

2 NOÇÕES DO SISTEMA NAVSTAR/ GPS

O *Navigation System with Time and Ranging Global Positioning System* NAVSTAR/GPS é um sistema de rádio-navegação baseado em observações aos satélites artificiais. O sistema foi desenvolvido pelos Departamento de Defesa e Departamento de Transporte dos Estados Unidos da América (*Department of Defense – DoD*) com o objetivo de ser o principal sistema de navegação do Exército Americano, proporcionando posicionamento tri-dimensional (Seeber, 1993).

O GPS possibilita o posicionamento tri-dimensional e a determinação de posições horizontais precisas já é um processo rotineiro. Entretanto, a altitude proporcionada pelo GPS (geométrica) tem apenas um significado matemático e, geralmente, na cartografia e em obras de engenharia utilizam-se das altitudes ortométricas (por possuírem um significado físico).

A componente altitude é afetada pelo modo (técnica) de levantamento e pela observável utilizada no levantamento GPS. Utilizando-se de técnicas de levantamentos e de combinações de procedimentos de processamentos, a precisão da altitude elipsoidal esperada é de 1,5 à 2 vezes menos acurada que as componentes horizontais (Featherstone *et al*, 1998).

A geometria do GPS, intrinsecamente influencia na precisão na altitude, isto devido ao fato de que os satélites são observados acima do horizonte (da antena) e esta fraqueza geométrica é quantificada pelo *Vertical Dilution Of Precision* (VDOP). Um importante procedimento é executar a coleta de dados GPS em horário que o VDOP está o menor possível.

Uma outra causa geométrica que afeta a altitude elipsoidal GPS é a aproximada correlação entre o erro das efemérides e o comprimento da linha base; esta relação é dada por:

$$\frac{\sigma_b}{b} \approx \frac{\sigma_\rho}{\rho} \quad (2)$$

onde, **b** representa o comprimento da linha base, σ_b é o erro relativo à linha base, ρ representa a distância entre o observador e o satélite observado e σ_ρ seu erro relativo. Assumindo que a distância do satélite ao observador seja de 20 000 km e as efemérides transmitidas possuam erro da ordem de 10 m, ter-se-á erros em altitude de aproximadamente $\pm 0,5$ parte por milhão (0,5mm/km). Entretanto, nos levantamentos onde pretende-se obter as altitudes com uso das efemérides transmitidas, o comprimento da linha base deve ser tanto menor quanto possível. Em levantamentos GPS com linhas de bases longas, recomenda-se o uso de efemérides precisas produzidas pelo *International GPS Service* IGS. Normalmente estas efemérides estão disponíveis aos usuários poucos dias após a execução dos levantamentos, e estas, normalmente, são uma ordem de uma magnitude melhor que as efemérides transmitidas.

Os sinais transmitidos pelo GPS atravessam a ionosfera e a atmosfera neutra (que inclui a estratosfera e a troposfera), sendo o atraso atmosférico afetado por ambas as camadas. Por se a ionosfera, um meio dispersivo, os efeitos do atraso dos sinais podem ser grandemente minimizados utilizando-se de rastreadores que observam simultaneamente as duas fases das frequências das portadoras GPS. A atmosfera neutra é um meio não dispersivo e, assim, seu efeito não pode ser eliminado utilizando-se as duas frequências portadoras. Assim sendo, o efeito da camada atmosférica deve ser eliminado por modelos atmosféricos. Neste trabalho, utilizou-se do modelo atmosférico denominado de Hopfield (Dodson, 1995).

Multi-caminhos

O multi-caminhos ocorre quando os sinais GPS são refletidos de objetos próximos, ou mesmo da superfície, antes de atingir antena do receptor. O multi-caminhos pode causar erros na altitude elipsoidal de poucos metros, quando utilizadas as observações do código, e de poucos centímetros quando utilizada a fase da portadora. Entretanto, o valor exato do erro provocado pelo multi-caminhos não pode ser determinado, pois este depende de fatores específicos do local. Para evitar os possíveis multi-caminhos, adotou-se a estratégia de selecionar locais de rastreamento em que não havia possibilidades das antenas receberem sinais refletidos de objetos (construções civis, árvores, etc. . .) próximos.

Orientação e centro de fase da antena

O centro de fase (eletrônico) da antena não coincide, necessariamente, com o seu centro geométrico. O centro de fase pode variar de acordo com a posição de cada satélite (elevação e azimute). A maioria dos programas computacionais corrige este efeito. Entretanto, com a finalidade de minimizar o efeito do centro de fase da antena em um levantamento, procedimentos especiais devem ser tomados, tais como: preferencialmente, utilizar antenas de um mesmo fabricante e mesmo modelo; e nas coletas de dados GPS todas as antenas devem ser orientadas na mesma direção.

Medição da altura da antena

O erro na medida da altura da antena, cuja distância deve ser contada sobre a vertical acima do marco de coleta de dados, é provavelmente, o mais comum erro humano cometido durante o levantamento GPS. Este erro é crítico para o levantamento de altitude, pois no processamento dos dados, este não é detectado. Assim, sugere-se procedimentos específicos nas realizações das medidas das antenas. Assim, adotou-se os procedimentos nas realizações de medidas das alturas da antena, tais como:

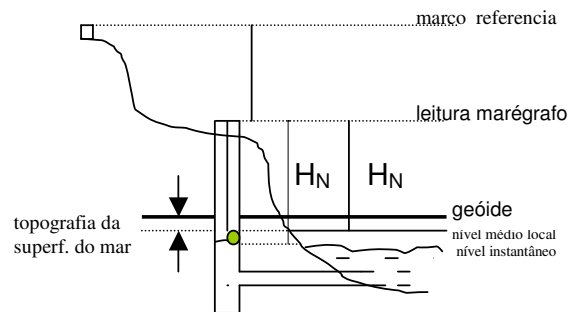
- . múltiplas medidas em mais de um sistema de unidades;
- . medidas realizadas em diferentes partes da antena; e
- . calcular a altura (vertical) e verificar no campo.

3 GEÓIDE

A posição horizontal de um ponto sobre a superfície terrestre é determinada por sua latitude e longitude sobre um determinado elipsóide de referência. O posicionamento altimétrico, mais intuitivo é dado pela distância contada sobre a linha vertical entre o ponto e uma superfície, normalmente associada ao nível médio do mar.

A altitude ortométrica é dependente do campo da gravidade da Terra. O *datum* vertical do sistema de altitudes ortométricas é o geóide. No Brasil, a determinação do datum vertical deu-se a partir do marégrafo instalado no litoral catarinense, mais precisamente no Porto Henrique Lajes, localizado na cidade de Imbituba-SC.

Até poucas décadas atrás foi postulado que o nível médio do mar, teoricamente, deveria coincidir com o geóide. Com base nesta imposição, o posicionamento do *datum* vertical (geóide) em relação a um marco de referência reduzia-se a determinação da posição do nível médio do mar (H_{NML}). A determinação do nível médio do mar é calculada a partir das observações do nível instantâneo do mar (H_{NMI}) coletadas nas estações de marégrafo. A figura 2 mostra, esquematicamente, o posicionamento do marco de referência.



Aranaf 2: Estabelecimento do marco de referência

Fonte: VANICEK e KRAKIWSKI, 1982

A definição do *datum* vertical é um tanto quanto complexa, pois envolve vários fenômenos físicos que podem estar alterando continuamente a posição do geóide em relação à superfície de referência (elipsóide). Dentre os fenômenos físicos, cita-se: o efeito dinâmico dos mares, as correntes marítimas; variação da pressão atmosférica (este pode causar deslocamento do nível

médio dos mar na ordem do decímetro, aproximadamente 1 cm por mbar (Vanicek e Krakiwski, 1982); variação dos ventos, que causa variação de poucos dm na determinação de uma média mensal da posição do geóide; mudança da temperatura, que causa uma variação de 1 a 3 cm por °C; descarga dos sedimentos fluviais; mudança da configuração do fundo oceânico (soalho oceânico); derretimento glacial, que causa um deslocamento de 6 a 10 cm por século; marés de longo período; e movimento dos polos.

A determinação da altitude ortométrica através do GPS pressupõe o conhecimento da ondulação do geóide com precisão compatível ao desejado na componente altitude. Atualmente, as técnicas mais usadas para a determinação do geóide com alta precisão, visando o nivelamento com o GPS, consistem basicamente na representação das altitudes geoidais através de componentes distintas, denominadas **global, a regional e local**. A **componente global** é determinada a partir dos coeficientes que representam o esferóide (elipsóide de revolução (Torge, 1980)); a **componente regional** usualmente é determinada a partir de dados do campo de gravidade (satélite, gravimetria terrestre e oceânica); e a **componente local** introduz correções calculadas através de dados complementares, tais como modelos digitais da topografia e da densidade da crosta.

A realização do rastreamento dos satélites do sistema GPS sobre as RNs, nos propicia a determinação da ondulação do geóide. Assim, em uma linha formada por duas RNs com altitudes geométricas conhecidas, pode-se interpolar a ondulação do geóide em pontos desta linha, ou próximo à mesma.

Featherstone et al. (1998), apresentam o modelo:

$$H_X = H_A + \Delta h_{AX} - \frac{l_{AX}}{l_{AB}} \Delta N_{AB} \quad (3)$$

Onde:

H_X – representa a altitude ortométrica do ponto a ser interpolado;

H_A – altitude ortométrica da RN, situada em A;

Δh_{AX} – diferença de altitudes geométricas do ponto a ser interpolado e RN, situada em A;

l_{AX} – distância entre o ponto a ser interpolado e a RN, em A;

l_{AB} – distância entre as RNs, situadas em A e em B; e

ΔN_{AB} – diferença de ondulações geoidais nas RN em A e em B.

Caso em que se deseja a interpolação de vários valores da ondulação do geóide, em uma área, pode-se determinar um plano, equação (4) ou uma poli-superfície, equações de (5) à (7). Assim, conhecendo-se pelo menos três RNs, não co-lineares, com altitudes geométricas determinadas por GPS, pode-se determinar a ondulação geoidal destes pontos, e a partir destas ondulações, determinar um plano, ou poli-superfície, que representa a forma aproximada do geóide na região. Estendendo-se o conceito de interpolação, descrito acima, para regiões que possuam número maior de pontos com ondulação do geóide conhecido pelo nivelamento geométrico associado ao GPS, pode-se utilizar modelos matemáticos que representam a forma aproximada do geóide na região em apreço. Há autores que caracterizam o geóide obtido por este procedimento de **geóide geométrico**, ainda, por se tratar da determinação do geóide em uma específica região, há autores que o designam de **geóide local**. Fielder (1992) e Collier & Croft (1997), apresentam modelos matemáticos (modelos de interpolação) que representam o geóide na região em apreço, conforme segue:

$$z_i = aE_i + bN_i + c \quad (4)$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cEN_i + d \quad (5)$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cE_i^2 + dN_i^2 + e \quad (6)$$

$$z_i = aE_i + bN_i + cN_iE_i + dE_i^2 + eN_i^2 + f \quad (7)$$

Onde:

z_i – representa a ondulação do geóide na RN;

E_i, N_i – coordenadas UTM das RN_i; e

a, b, c, d, e, f – são os parâmetros a serem determinados no ajustamento.

4 GPS NA ÁREA DO TRABALHO E BASE DE DADOS

A área do desenvolvimento deste trabalho encontra-se na Região Norte do Estado do Paraná, mais especificamente entre as cidades de Nova Esperança, Doutor Camargo, Apucarana e Arapongas; possuindo uma altitude média de 556m , onde a máxima altitude é de 815 m e a mínima de 345 m.

Rastreamento

O rastreamento (em campo) foi desenvolvido respeitando o planejamento, e utilizando-se de rastreadores TRIMBLE™ modelo 4000 SST, o qual possui a capacidade de rastrear as portadoras $L_{1/2}$. Observa-se que os três receptores envolvidos no projeto são do mesmo fabricante e mesmo modelo. O tempo de rastreio em cada seção foi de 1h 20min.

Nas RNs onde houve a necessidade de estação excêntrica, esta foi implantada a uma distância máxima de 40 m da RN. As estações excêntricas foram escolhidas de modo a eliminar possíveis bloqueios dos sinais causados por construções civis ou por vegetações próximas às RNs, ou ainda por reflexos indesejáveis geradores de multicaminhos (*multipath*).

Base de dados

No processamento dos dados GPS, salienta-se que as estações fixas estão referenciadas ao sistema WGS84 (1ª realização), no processamento foram utilizadas efemérides ITRF-92, que são compatíveis com o WGS84 (G 730) na ordem do decímetro.

As diferentes realizações WGS84 implicam em um deslocamento aparente de 82 cm na estação PARA e de 67 cm na estação UEPP. Com relação às altitudes este fato proporciona diferenças de +10,9 cm e +13,9 cm na estação PARA e UEPP, respectivamente.

Considerando que as distâncias que as RNs estão em relação às estações fixas, aproximadamente 154 km da estação UEPP e 350 km da estação PARA, que o ajustamento GPS não ponderou as RRNN quanto às distâncias das estações fixas, e que as diferenças de altitudes devido às diferentes realizações WGS84, conclui-se que as altitudes resultantes contem erros sistemáticos de aproximadamente +13 cm, além daqueles inerentes ao levantamento em si.

Considerando que a região de estudo encontra-se, aproximadamente, a 800 km de Imbituba SC (datum vertical), espera-se erros nas RNs de cerca de 15,5 cm. Ainda com relação a erros, considerando que a área de trabalho possui dimensões, aproximadas, de 70 por 70 km, as RNs podem possuir erros relativos de até 2,4 cm, quando considerado o padrão da rede de $3\text{mm}\sqrt{K}$.

Aliada as diferentes realizações WGS84 e aos erros das RNs, deve-se considerar que a topografia do nível médio dos mares (NMM) no *datum* é estimada em aproximadamente 13 cm, relativamente ao geóide do EGM96 (Freitas et al, 1999).

5 DETERMINAÇÃO DE N A PARTIR DO GPS/NIVELAMENTO

O desenvolvimento do nivelamento geométrico, usualmente realizado ao longo de rodovias (lugares de fácil acesso) proporciona a diferença de nível. Os pontos da superfície terrestre com altitudes conhecidas são denominados de **Referências de Nível – RN**.

No processamento, as determinações das coordenadas geodésicas, utilizando-se do sistema GPS, nos proporcionam coordenadas retangulares (X, Y, Z) referenciadas ao sistema WGS84 (isto quando se utilizam as efemérides transmitidas). Quando se utilizam as efemérides precisas, deve-se ter em mente que elas podem estar em outro sistema de referência, por exemplo um dos ITRFs. É fundamental a redução do sistema de referência das estações de base, para a obtenção dos melhores resultados finais.

Cálculo da ondulação do geóide por GPS associado ao nivelamento

Conforme já visto, na equação 01, o nivelamento geométrico nos fornece a altitude ortométrica, enquanto que o GPS fornece a altitude geométrica. Conhecendo-se as altitudes ortométrica e geométrica, é possível a determinação da altura geoidal.

A técnica de determinação da ondulação do geóide por GPS associado ao nivelamento contribuiu consideravelmente para o cálculo determinação do geóide em um local (na literatura encontra-se como determinação **de um geóide local**, o que descaracteriza a definição de geóide . . . *do nível médio dos mares não perturbado*). Neste método, deve-se ter um determinado número de RNs conhecidas, onde são executados os rastreamentos GPS, e assim, determinando a ondulação do geóide para cada RN rastreada.

A tabela 01, a primeira coluna contém as RNs; a segunda coluna contém as altitudes geométricas determinadas pelo GPS, no sistema WGS84; e na terceira coluna as ondulações geoidais, calculadas com a equação 01, ou seja, altitude geométrica menos a altitude ortométrica.

Tabela 01 – Altitudes geométricas e ondulações geoidais

RN	h (m)	N (m)	RN	h (m)	N (m)
1582SE	482,409	-1,859	1591D	631,794	-1,838
1582N	528,407	-1,720	1591X	750,480	-1,757
1582M	535,490	-1,653	1590TE	770,859	-1,684
1582HE	539,536	-1,561	1590RE	786,458	-1,649
1578D	576,506	-1,677	1590LE	813,659	-1,501
1578GE	553,247	-1,760	2926U	761,411	-2,088
1578JE	564,975	-1,664	2926X	722,828	-2,072
1578P	569,829	-1,609	2927C	717,582	-2,070
1578SE	576,563	-1,616	2927E	714,760	-2,015
1578TE	572,492	-1,530	2927GE	668,151	-2,293
1579D	572,673	-1,719	2928AE	570,005	-2,264
1579 A	538,911	-1,895	2927LE	680,034	-2,278
1578UE	554,856	-1,941	2927RE	653,134	-2,362
1579T	394,297	-1,770	2927U	630,979	-2,320
1594S	410,626	-1,866	2928F	498,572	-2,195
1594R	386,278	-1,752	2928H	451,678	-2,039
1594ME	377,370	-1,744	2928LE	562,703	-2,124
1579ZE	380,783	-1,637	2928M	364,504	-2,477
1579TE	342,973	-1,596	2928PE	441,062	-1,965
1579PE	369,698	-1,532	2928SE	414,751	-2,027
1579FE	527,922	-1,929	2928UE	511,096	-1,993
1579H	480,298	-1,719	2928VE	518,831	-1,809
1591HE	535,211	-1,797	2928ZE	526,772	-1,821
1591JE	552,580	-1,828	2928CE	559,883	-1,707

ONDULAÇÕES GEOIDAIS

Os dados acima (tabela 01) nos proporcionam :

- Média das ondulações geoidais -1,8657 m;
- Dispersão das ondulações 0,2455 m;
- Máxima ondulação -1,501 m; e
- Mínima ondulação -2,477 m

Considerando as ondulações das RNs próximas, o valor determinado na RN 2928M (-2,477m) não pode condizer com a realidade física evidenciada pela comparação de **N** nesta RN com as obtidas em suas adjacentes (apresenta, variação de ondulação de aproximadamente 50 cm em relação às RNs 2928PE e 2928H, distantes cerca de 4 km. Portando, sugere-se que ocorreu algum problema (deslocamento da RN) ou mesmo um erro grosseiro, devido a este fato, a RN 2928M não está considera nos processamentos que seguem.

Cálculo da ondulação do geóide pelos modelos matemáticos determinados por GPS/nivelamento

Neste item serão utilizados os modelos matemáticos, apresentados, onde deseja-se determinar uma poli-superfície (equação 5). Foram utilizadas todas as RNs na determinação dos parâmetros desta equação, que visa modelar o geóide na respectiva região de estudo.

Experimentos realizados com os modelos matemáticos equações 4 à 7 mostraram que a equação 5 foi a que apresentou menores discrepâncias (erros), ou seja, foi a que melhor representou o geóide na região.

Resultado utilizando-se 47RRNN

Apresenta-se na tabela 2 os resultados do processamento, ou seja, apresenta-se as ondulações geoidais calculadas a partir dos parâmetros determinados da equação 5.

A primeira coluna da tabela 2 contém as RNs; a segunda coluna a ondulação geoidal, determinada em função dos parâmetros da equação 5; e a terceira coluna contém os resíduos. Estes resíduos foram determinados a partir dos valores das ondulações determinadas pelo GPS/nivelamento menos as ondulações determinadas pelo modelo matemático.

Tabela 2 – Ondulações determinadas pelo modelo matemático nas 47RNs

RN	N (m)	RESÍDUO (m)	RN	N (m)	RESÍDUO (m)
1582SE	-1,760	0,010	1591D	-1,770	0,068
1582N	-1,743	-0,023	1590X	-1,725	0,033
1582M	-1,743	-0,099	1590TE	-1,663	0,021
1582HE	-1,699	-0,139	1590RE	-1,590	0,059
1578D	-1,682	-0,004	1590LE	-1,577	-0,076
1578GE	-1,729	0,038	2926U	-2,183	-0,095
1578JE	-1,728	-0,064	2926X	-2,184	-0,112
1578P	-1,760	-0,152	2927C	-2,204	-0,134
1578SE	-1,763	-0,148	2927E	-2,226	-0,211
1578TE	-1,768	-0,239	2927GE	-2,224	-0,070
1579D	-1,794	-0,075	2928AE	-2,265	-0,001
1579 A	-1,811	0,081	2927LE	-2,261	0,017
1578UE	-1,780	0,161	2927RE	-2,212	0,151
1594T	-1,701	0,069	2927U	-2,172	0,148
1594S	-1,689	0,177	2928F	-2,089	0,105
1594R	-1,679	0,073	2928H	-2,027	0,013
1594ME	-1,665	0,079	2928LE	-2,134	-0,011
1579ZE	-1,694	-0,057	2928PE	-1,933	0,032
1579TE	-1,692	-0,096	2928SE	-1,892	0,135
1579PE	-1,699	-0,167	2928UE	-1,879	0,114
1579FE	-1,756	0,172	2928VE	-1,849	-0,039
1579H	-1,736	-0,017	2928ZE	-1,797	0,024
1591HE	-1,796	0,008	2928CE	-1,730	-0,024
1591JE	-1,807	-0,021			

A partir das discrepâncias calculadas, apresentadas pelo modelo matemático, calculou-se o erro médio quadrático, 0,1075 m e média das discrepâncias de -0,006 m. Ainda, verifica-se que a máxima discrepância é de 0,1774 m e a mínima de -0,2387 m.

Com o objetivo de verificar se o modelo matemático, gerado pelas RNs, apresentam tendências estatística, elaborou-se a tabela 3. Na primeira linha contém o número de RNs utilizadas para determinar os parâmetros do modelo; a segunda linha contém o teste amostral "t"; e a terceira linha contém o intervalo de confiança.

Tabela 3 – Análise de tendência do modelo matemático

MODELO	47 RRNN
t_x	0,000
$t_{(n-1, \alpha/2)}$	1,680

Diante da tabela 3, conclui-se que não são rejeitadas as hipótese nulas (H_0); ou seja os modelos podem ser considerados, estatisticamente, não tendenciosos.

A partir das ondulações determinadas com uso dos parâmetros que determinaram o modelo matemático, elaborou-se a tabela 4.

Tabela 4 – RNs fornecidas pelo IBGE e as determinadas com uso do modelo matemático

RN	H _(IBGE) (m)	H _(GPS+MOD) (m)	Resíduos (m)
1582SE	484,268	484,169	0,099
1582N	530,127	530,150	-0,023
1582M	537,143	537,233	-0,090
1582HE	541,096	541,235	-0,139
1578D	578,183	578,188	-0,005
1578GE	555,007	554,976	0,031
1578JE	566,639	566,703	-0,064
1578P	571,438	571,589	-0,151
1578SE	578,178	578,326	-0,148
1578TE	574,022	574,260	-0,238
1579D	575,408	574,467	-0,059
1579 ^A	540,806	540,722	0,084
1578UE	556,799	556,636	0,163
1594T	396,066	395,998	0,068
1594S	412,492	412,315	0,177
1594R	388,030	387,957	0,073
1594ME	379,114	379,035	0,079
1579ZE	382,419	382,477	0,058
1579TE	344,569	344,665	0,096
1579PE	371,229	371,397	0,168
1579FE	529,850	529,678	0,172
1579H	482,017	482,034	0,017
1591HE	537,010	537,007	0,003
1591JE	554,408	554,387	0,021
1591D	633,632	633,564	0,068
1590X	752,239	752,205	0,034
1590TE	772,543	772,522	0,021
1590RE	788,108	788,048	0,060
1590LE	815,160	815,236	-0,076
2926U	763,499	763,594	-0,095
2926X	724,900	725,012	-0,112
2927CE	719,653	719,786	-0,133
2927E	716,774	716,986	-0,212
2927GE	670,445	670,375	-0,070
2928 ^A E	572,269	572,270	-0,001
2927LE	682,312	682,295	0,017
2927RE	655,496	655,346	0,150
2927U	633,299	633,151	0,148
2928F	500,766	500,661	0,105
2928H	453,717	453,705	0,012
2928LE	564,827	564,837	-0,010
2928PE	443,027	442,995	0,032
2928SE	416,778	416,643	0,135
2928UE	513,089	512,975	0,114
2928VE	520,640	520,680	-0,040
2928ZE	528,593	528,569	0,024
2929CE	561,589	561,613	-0,024

Os resíduos, apresentados na tabela 4, proporcionam desvio padrão de 0,108 m, máximo resíduo refere-se à RN 1594S e o mínimo resíduo é de -0,238 m, proporcionado pela RN 1578TE.

6 CONCLUSÃO E RECOMENDAÇÕES

O presente trabalho apresenta uma sistemática de integração do GPS ao nivelamento geométrico, onde esta sistemática pode facilmente ser reproduzida por usuários e a análise de limitações devem ser analisadas pelo leitor.

O principal objetivo deste trabalho foi atingido na medida que foi realizada a integração do sistema GPS ao nivelamento geométrico, verificando a precisão desta integração a partir de levantamentos GPS sobre RNs.

Os dados para a geração do "grid" do geóide geométrico estão limitados à área teste (do trabalho). Isto sugere que em trabalhos posteriores devam ser realizados.

Foi verificada a influência do tempo de rastreamento nas RN, no processamento dos dados GPS; onde concluiu-se que o tempo de rastreamento foi suficiente e, em RNs onde o tempo de rastreamento foi aumentado para 2 h 20 min, os resultados não apresentaram melhora significativa relativamente aos valores obtidos com 1h20min.

Na época do experimento existiam limitações de estações base, compatibilização de sistemas de referência, S.A, equipamentos marca Trimble 4000 da série SST, as quais na atualidade estão superados pela proximidade do WGS84 com o ITRF, pela eliminação do S.A., pela melhoria dos equipamentos de rastreamento e pela existência da RBMC/SIRGAS.

A pluralidade de Sistemas de Referência, na época do experimento, e os problemas encontrados, demonstram a importância de unificação de referenciais a nível global e melhor discussão do sistema de altitudes.

Os resultados obtidos estão totalmente justificados em vista da precisão da base de dados e métodos empregados, demonstrando a eficiência do método.

Com base nos resultados alcançados neste trabalho, sugere-se:

- Em regiões onde existam mais RNs, com distribuição geográfica regular, pode-se utilizar a metodologia aqui apresentada.
- Em regiões onde exista baixa densidade de RNs, que se realize o rastreamento GPS sobre estas RNs, determinado a média da ondulação geoidal. Nos pontos que se deseja a ondulação do geóide, utiliza-se esta média de N; e
- Em regiões onde não possuem RNs, utilizar apenas o geóide gravimétrico, e na inexistência deste, o modelo geopotencial EGM96.

O resultado deste trabalho sugere que a presente metodologia seja aplicada às regiões mais extensas, onde existam informações similares, tais como as redes GPS estaduais de alta precisão onde os pontos tenham nivelamento geométrico.

Agradecimentos

À FAPESP pelo apoio financeiro concedido para a realização do deste trabalho.

BIBLIOGRAFIA

Ayhan, M.E. *Geoid determination in Turkey (TG-91)*. Bulletin Géodésique. Springer-Verlag. Berlin. v 67. n 1. 1993.

Collier, P. A., Croft, M. J. *Heights from GPS in an engineering environment*. Survey Review, Uk, ed. Board, n. 263. 1997.

Dodson, A. H. *GPS for height Determination*, Survey Reviews, New York, v. 33, n. 256. 1995.

Featherstone, W. E., Dentith, M. C. and Kirby, J. F. *Strategies for the accurate determination of orthometric heights from GPS*. Survey Review, New York, v. 34, n. 267. 1998.

Fielder, J. *Orthometric heights from Global Positioning System*. Journal of Surveying Engineering. New York. v 118. n 3. 1992.

Freitas, S. R., Cordini, J., Marone, E., Schwab, S. H. S. *Vínculo da rede altimétrica brasileira à rede SIRGAS*. International Geoid Service, Bulletin n. 9, Special Issue for South America. Italy. 1999.

Gemael, C. *Introdução à Geodésia Física*. Editora da Universidade Federal do Paraná . Curitiba. 1999.

Leick, A. *GPS - Satellite Surveying*. John Wiley & Sons. New York. 2^a ed. 1995.

Li, Y. C. e Sideris, M. G. *Minimization and estimation of geoid undulation errors*. Bulletin Géodésique. Springer – Verlag. v. 68. 1994.

Seeber, G. *Satellite Geodesy: Foundations, Methods and Applications*. Walter de Gruyter. Berlin. 1993.

Vanicek, P. e Krakiwsky, E. J. *Geodesy: The concepts*. NHPC - Amsterdam, New York, Oxford. University of New Brunswick. Canadá. 1982.