GEOMETRIA DIFERENCIAL: ASPECTOS HISTÓRICOS E A DEFINIÇÃO DE LINHA GEODÉSICA

ANDERSON MARCOLINO DE SANTANA, FRANCISCO JAIME BEZERRA MENDONÇA

Universidade Federal de Pernambuco - UFPE
Departamento de Engenharia Cartográfica – DECart, Recife - PE
Programa de Pós Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação
ander_marcolino@yahoo.com.br, jaime@ufpe.br

ABSTRACT

Differential Geometry (DG) is a branch of mathematics education that aims at the study of the properties of curves and surfaces, using basic concepts of differential and Integral Calculus and Linear Algebra. Great mathematicians contributed with his studies on differential geometry, will be presented in a simple way the Trihedron of Frénet-Serret that assists in determining the concept of geodetic line in DG. Thus, this work is a brief exposition of fundamental historical ideas of differential geometry and shows how mathematicians in this area contributed concepts and theorems in Geodesy, mainly on the concept of geodetic line.

Key words: Differential Geometry, the Frenet-Serret trihedron, Geodesic Line

1 INTRODUÇÃO

Linha geodésica pode ser considerada, em qualquer superfície no espaço, a menor distancia entre dois pontos. No entanto, para a determinação do conceito de linha geodésica com fundamentação matemática faz-se necessário o conhecimento de alguns teoremas da Geometria Diferencial (GD).

Este trabalho tem por objetivo fazer um levantamento de aspectos históricos da GD, assim como, fazer uma reflexão sobre a importância de alguns trabalhos de grandes matemáticos que contribuíram com teoremas aplicados às Ciências Geodésicas, principalmente, para a determinação do conceito de linha geodésica.

2 GEOMETRIA DIFERENCIAL

De acordo com Eves (2004), a Geometria Diferencial é o estudo das propriedades das curvas e superfícies, e suas generalizações, por meio do cálculo.

Picado (2003) considera a GD como o estudo de natureza geométrica – curvas e superfícies – usando técnicas de cálculo diferencial e integral. Para uma razoável compreensão da GD é necessário, além da familiaridade com cálculo, o conhecimento de alguns conceitos de Álgebra Linear.

A Geometria Diferencial pode ser dividida em dois aspectos: a GD Clássica, que é o estudo de curvas e superfícies e suas propriedades locais (entendendo-se por propriedades locais as características da curva ou da superfície em relação à vizinhança de um ponto); e a GD Global que estuda a influência das propriedades locais no comportamento de toda a curva ou superfície. (CARMO, 1976)

Quanto ao seu surgimento, segundo Eves (2004), começou inicialmente no século XVIII com aplicações do cálculo diferencial e integral aplicado à geometria analítica. Porém, o primeiro a estimular o assunto em situações não planas foi Gaspard Monge (1746-1818), considerado o pai da Geometria Diferencial de curvas e superfícies no espaço.

Na Geodésia Geométrica, encontramos nomes como J. B. Meusnier (1754-1793), que foi um dos primeiros alunos de Monge a entrar no ramo da GD. Já a escola francesa especialista em Geometria Diferencial, inclui nomes como Saint-Venant (1796-1886), que introduziu o termo binormal associado a um dos conceitos do triedro local de um ponto de uma curva espacial; F. Frénet (1816-1888) e J.A. Serret (1819-1885), responsáveis pelas Fórmulas de Frenet-Serret, que é de importância para o conceito de linha geodésica. (EVES, 2004)

Ainda de acordo com Eves (2004), a Geometria Diferencial conclui sua primeira fase com trabalhos desenvolvidos por Augustin Louis Cauchy (1789-1857). A sua segunda fase é marcada pelas contribuições de Carl Frederich Gauss (1777-1855), enquanto Monge é conhecido pelos trabalhos realizados como engenheiro especializado em construções militares, Gauss é conhecido, entre outras coisas, por seu trabalho em Geodésia e Agrimensura geodésica. A terceira fase da GD é caracterizada pelos trabalhos de G. B. Riemann (1826-1866), concentrando-se em aspectos de variedades m-dimensionais imersa em espaços n-dimensionais, conhecida como Geometria Riemanniana.

Segundo Lemos (2011), a Geometria Diferencial é uma disciplina da matemática de extrema importância para a física contemporânea e suas aplicações estendem-se desde a mecânica clássica à física das partículas elementares, sem falar no seu papel vital na teoria da relatividade geral de Einstein.

ISSN 1981-6251

3 TRIEDRO DE FRÉNET-SERRET E LINHA GEODÉSICA

Conforme Dacorso Neto (1977), chama-se Triedro de Frénet-Serret todo ponto P de uma curva ao triedro tri-retângulo de vértice nesse ponto e definido pelas direções: I) da *tangente* à curva, definida pelo vetor unitário t e orientada no sentido dos arcos crescentes. II) da *normal principal* cujo suporte está situado no plano osculador e é perpendicular à tangente; é definida pelo vetor n e orientada no sentido da concavidade da curva. III) da *binormal*, cujo suporte é perpendicular ao plano osculador, e está contida, portanto, no plano normal; é definida pelo vetor unitário b e orientada de modo que o triedro definido por t, n, b.

O triedro forma três planos: o Plano Osculador que é o plano formado pelo vetor tangente e o vetor normal, representado por tn; o Plano Normal é o plano formado pelo vetor normal e o vetor binormal, representado por nb; e o Plano Retificante é plano formado pelo vetor binormal e o vetor tangente. A figura representa uma curva de uma superfície e o Triedro de Frénet-Serret.

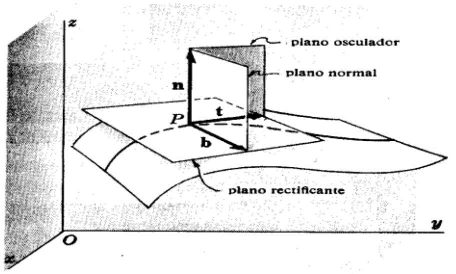

Figura 1 – Triedro de Frénet-Serret
Fonte: http://elmundodecookie.wikispaces.com/Unidad1+Tema1.5+Elementos+De+Las+Artes+Pl%C3%A1sticas

Segundo Carmo (1976), a derivada do vetor tangente e do vetor binormal do Triedro fornecem a curvatura κ e a torção τ, que informam características do comportamento da curva ou superfície sobre a vizinhança de P. Assim, $t' = \kappa n$ e $b' = \tau n$, a derivada do vetor tangente será usada para definir a linha geodésica de uma superfície.

Darcoso Netto (1977) define linhas geodésicas como sendo as linhas cuja normal principal coincide com a normal à superfície. E ficam definidas por: $t' = 1/R \cdot N$ sendo R o raio de curvatura da linha e N o vetor unitário da normal à superfície. E completa, demonstra-se que o percurso mínimo entre dois pontos suficientemente próximos de uma superfície é o arco da linha geodésica que passa por esses pontos.

Essas duas definições de linha geodésica apresentada por Darcoso Netto (1977) é defendida por Gemael (1977) como sendo uma linha jacente numa superfície e tal que em todos os seus pontos a sua normal principal coincide com a normal à superfície. Com sucintas palavras completa que linha geodésica representa o menor caminho entre dois pontos sobre a superfície considerada.

Para Carmo (1975), uma curva regular é dita geodésica se, e somente se, a sua normal principal (n) em cada ponto P é paralela à normal N da superfície em P.

Chama-se geodésica uma linha, jacente numa superfície, e tal que em todos os seus pontos, o plano osculador é normal à superfície. (Gemael, 1977)

4 CONSIDERAÇÕES

O presente trabalho teve o objetivo de levantar aspectos históricos da Geometria Diferencial, que é uma área da Matemática que estuda curvas e superfícies e suas propriedades sejam elas, locais ou globais. Percebe-se que grandes teoremas conhecidos em Geodésia Geométrica tem uma estreita ligação com matemáticos que foram exímios produtores em GD.

O Triedro de Frénet-Serret tem grande influência no conceito de linha geodésica, porém a diferença entre a definição em GD e a que é definida em Geodésia é a superfície considerada. Em GD são tratadas qualquer superfície regular, na Geodésia a superfície principal em estudo é o elipsoide de revolução. Assim, independente da superfície estudada, linha geodésica é a menor distancia percorrida entre dois pontos.

Uma possível recomendação de estudo seria a compreensão de como as aplicações da Geometria Diferencial influenciaram as grandes descobertas em Geodésia, principalmente os trabalhos de Gauss.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem o apoio da UFPE, principalmente ao Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas e Tecnologias da Geoinformação e à Bolsa REUNI.

REFERÊNCIAS

CARMO, M. P. ***Differential Geometry of Curves and Surfaces.*** Prentice-Hall, 1976.

CARMO, M. P. ***Elementos de Geometria Diferencial***. Ao Livro Técnico S.A. e Editora Universidade de Brasília. 1975.

EVES, H. ***Introdução à História da Matemática.*** Trad. Hygino H. Domingues. Campinas: Unicamp, 2005.

GEMAEL, C**. *Introdução a Geodésia Geométrica 1a Parte e 2a Parte***. Curitiba: UFPR, 1977.

LEMOS, N. A; PEREIRA, A. D. ***Geometria diferencial de curvas e dinâmica da partícula.*** Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 33, n. 2, 2306 , 2011. Disponível em <http://www.sbfisica.org.br/rbef/pdf/332306.pdf>, Acessado em 12 de abril de 2012.

NETTO, Cesar Dacorso. ***Elementos de Geometria Diferencial.*** Rio de Janeiro: Interciência, 1977.

PICADO, J. ***Apontamentos de Geometria Diferencial***. Departamento de Matemática, Universidade de Coimbra, 2003. Disponível em< http://www.mat.uc.pt/~picado/geomdif/0405/sebenta.pdf > Acessado em: 08 de abril de 2012