

# UMA ABORDAGEM REMOVE-RESTORE SOB A ÓPTICA DO TRATAMENTO MATRICIAL DE IMAGENS

<sup>1</sup>ROGERS ADEMIR DRUNN PEREIRA  
<sup>2</sup>SÍLVIO ROGÉRIO CORREIA DE FREITAS  
<sup>2</sup>JORGE SILVA CENTENO

Universidade Federal do Paraná  
<sup>1</sup>Programa de Pós-Graduação em Ciências Geodésicas  
<sup>2</sup>Departamento de Geomática  
{ rogers\_adp, sfreitas, centeno }@ufpr.br

**RESUMO** - É apresentado um diferente ponto de vista para a técnica *remove-restore* relacionada aos cálculos no espaço geopotencial/da gravidade visando-se obter altitudes físicas a partir de técnicas GNSS. Alguns conceitos derivados do processamento digital de imagens foram utilizados para modificar a regularização das grades utilizadas e nas operações entre grades com diferentes resoluções. Aproveitou-se da linearidade das operações para a modificação da abordagem clássica. Com esta idéia em mente, espera-se soluções consistentes comparativamente aos resultados obtidos com soluções tradicionais tais como os daqueles advindos da Colocação por Mínimos Quadrados. Erros da mesma magnitude foram encontradas ao comparar-se a metodologia proposta de forma linear com o modelo disponibilizado pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística.

**Palavras chave:** *remove-restore*, abordagem do processamento digital de imagens, Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ).

**ABSTRACT** - We present some different approaches to remove restore technique related to computations in the gravity/ geopotential space for obtaining physical heights from GNSS techniques. Some concepts from digital image processing were used to modify the grid's regularization stage as well as the operations among grids with different resolutions. Concerning the approach, all the computations are in a linear domain. Then, it is expected consistent solutions with comparable results like those obtained from traditional solutions like Least Squares Collocation. A comparison of purposed methodology in linear form with model furnished by Brazilian Institute of Geography and Statistics resulted the same expected errors.

**Key words:** *remove-restore*, digital image processing approaching, Least Square Collocation (LSC).

## 1 INTRODUÇÃO

O principal caminho para a determinação de altitudes com significado físico via observações GNSS têm sido a determinação do potencial perturbador como propiciado pela resolução da Integral de Stokes ou alguma de suas variantes. Estas integrais visam a obtenção de alturas geoidais ou anomalias de altitude que, de algum modo, relacionam altitudes provenientes de um modelo geométrico com as de um modelo físico. Para a resolução de uma destas integrais, no entanto, necessita-se conhecer quantidades associadas ao campo da gravidade com resolução adequada sobre toda uma superfície representativa da Terra que é escolhida dependendo do modelo de integral a ser utilizado. Estas quantidades são difíceis de serem obtidas pontualmente por diversos fatores: inacessibilidade de áreas, grande extensão territorial associada à indisponibilidade de recursos financeiros, dificuldade de materialização de referenciais adequados (e.g. nos oceanos) e assim por diante.

A solução para o problema é predominantemente vinculada ao tratamento em conjunto de funções harmônicas de diferentes sub-espacos. Assim busca-se a

associação de funções no espaço do geopotencial/campo da gravidade com outras, principalmente aquelas com raízes na topologia. A solução tem base em conhecimentos cuja origem pode situar-se na Teoria do Potencial e podem receber contribuição do Espaço Topológico. Esta visão está na base da Colocação por Mínimos Quadrados (CMQ). Um aspecto central a ser considerado é o da amostragem. Todas as variáveis tratadas em Geodésia podem ser expressas na forma discreta ou contínua e existem transformações ótimas possíveis entre as duas abordagens. Esta visão tem como um dos seus marcos fundamentais a série de trabalhos de Torbem Krarup, que são disponibilizados de forma sistematizada na obra *Mathematical Foundations of Geodesy* (BORRE, 2006). O presente trabalho é balizado nestes pressupostos e também no fato de que grandezas associadas ao potencial perturbador podem, em vista de sua amplitude, serem tratadas como lineares.

O problema enfocado no presente trabalho diz respeito ao denominado Problema do Valor de Contorno da Altimetria/Gravimetria – PVCAG (LEHMANN, 2000). O método preferencial de abordagem para o aspecto do problema é relacionado com a obtenção de

informações altimétricas com significado físico em um conjunto discreto de pontos envolvendo tanto informações contínuas ou integradas quanto discretas de outra natureza. Foi considerado, por exemplo, o fato de que à medida que um ponto *B* com uma determinada massa se afasta do ponto *A* cuja altura geoidal *N* se deseja obter, o efeito do potencial gravitacional (*V*) da massa *B* sobre o ponto *A* sofre redução. Por conseqüência, reduz também o efeito do potencial perturbador (*T*) conforme avaliado no primeiro ponto. Sendo *N* função direta de *T*, quanto maior a distância de *B* para *A*, menor o efeito do ponto *B* relativamente à *A* e, então, o efeito de *B* sobre *A* pode ser determinado por uma outra técnica sem resolução pontual, como por exemplo, por observações satelitais.

As ideias envolvidas no parágrafo precedente estão presentes na técnica *remove-restore*, onde os efeitos das anomalias da gravidade obtidas a partir de levantamentos locais ( $\Delta g_{obs}$ ) são subtraídas dos efeitos das anomalias da gravidade advindas de um Modelo Global do Geopotencial ( $\Delta g_{MGG}$ ) e de efeitos devidos à topografia (*TC*), obtendo-se anomalias da gravidade residuais ( $\Delta g_{res}$ ). Com estes valores, calcula-se a Integral de Stokes (ou, equivalentemente, a Integral de Molodenskii) e em associação com a fórmula de Bruns, o resultado é uma altura geoidal residual  $N_{res}$  (ou se Integral de Molodenskii for aplicada, a anomalia de altitude  $\zeta_{res}$ ) que é somada a uma altura geoidal obtida de um MGG  $N_{MGG}$  (ou, como antes, a  $\zeta_{MGG}$ ). Assim, na seqüência são consideradas as dificuldades associadas à programação desta técnica por envolver laços de repetição que são resolvidos matematicamente com transformadas de Fourier, Colocação por Mínimos Quadrados e outras técnicas.

## 2 METODOLOGIA

Neste trabalho propõe-se minimizar alguns efeitos de uma das dificuldades matemáticas reportadas na seção anterior, a saber: As etapas usuais de integração associadas à solução do Problema do Valor de Contorno da Geodésia (PVCG) em sua forma livre clássica via Integral de Stokes ou em sua forma fixada tal como a do Problema de Brovar tal dada por Ferreira (2011) e ao núcleo de Koch (HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005), ou ainda de forma mais objetiva ao PVCAG já referido, pressupõem primeiramente fases interpolativas para a homogeneização das áreas a serem subtraídas de uma referência global, tal como um MGG. Somente assim estas grades de informações podem ser combinadas de forma numérica. Deste modo, aproveitando-se da linearidade das operações, sugere-se a retirada das fases anteriores via a transformação de todas as quantidades em alturas geoidais e operá-las de tal maneira que o resultado seja o mesmo caso não houvesse intervenção em qualquer etapa e, sem modificar-se referencial adotado. Esta idéia considera como ferramenta o tratamento dado às técnicas de cálculo matricial como norteadoras de uma diferente óptica para o *remove-restore*.

Para ilustrar a metodologia ora proposta, adota-se por exemplo, as etapas envolvidas no cálculo de um geóide gravimétrico na sua forma clássica livre. Visando-se demonstrar as etapas que devem ser suprimidas e/ou alteradas, apresenta-se o esquema da Figura 1, bem como a enumeração de algumas etapas essenciais representadas em balões circulares, a seguir:

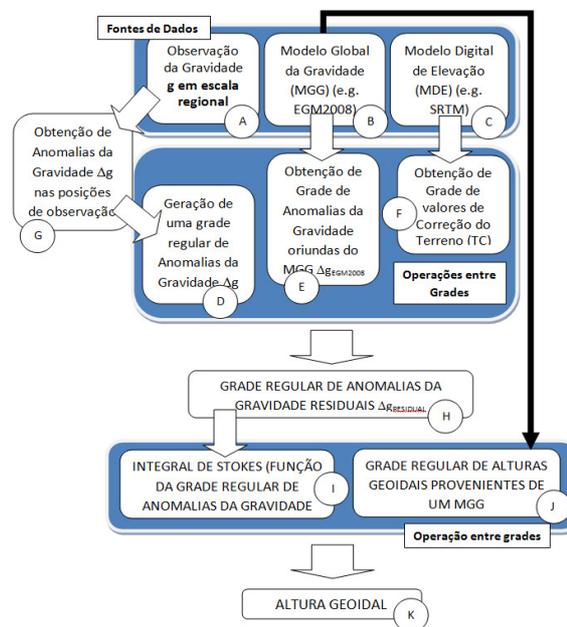


Figura 1 – Esquema do cálculo de um geóide gravimétrico compreendido em algumas etapas essenciais.

A operação *remove* envolve subtrair a grade indicada em D da grade representada em E e somá-la com a grade representada em F. A operação *restore* consiste em somar as grades indicadas em I e J. Todas estas etapas são operações lineares.

### 1.1 Compatibilização entre resoluções dos modelos da Gravidade e de Elevação

Na obtenção de um geóide gravimétrico, pelo menos duas diferentes resoluções estão envolvidas: a) A resolução do MGG e b) A resolução do Modelo Digital de Elevação (MDE). Considere-se a representação digital de cada um destes modelos matricialmente, à esquerda e à direita respectivamente, como na Figura 2, abaixo:

5	3	7
7	4	5
3	2	0

1	2	5	6	5	7
7	4	3	4	5	6
7	6	5	5	3	4
7	5	5	3	7	2
4	3	1	5	0	1
2	3	4	3	2	0

Figura 2 – Representação digital de um MGG (à esquerda) e de um MDE (à direita).

Ambos os modelos têm limites geográficos iguais entre si. Diferem, conceitualmente, pela magnitude do valor digital e pela sua resolução espacial. Também diz-se

que o modelo da esquerda é um modelo físico, no qual cada célula é calculada a partir de coeficientes de um MGG. No caso deste trabalho, o modelo proveniente do MGG é composto de anomalias de altitude e estas quantidades representam longos comprimentos de onda do geopotencial; no modelo da direita usualmente estão representadas observações radar cujo significado é geométrico (uma distância relativa) não é compatível em termos de sistemas de referência com o modelo da esquerda. As quantidades deste modelo representam curtíssimos comprimentos de onda do Geopotencial.

Se os limites das observações são os mesmos, então é possível transformar toda a grade de altitudes em quantidades físicas via o cálculo de correções do Terreno (etapa C), expresso, por exemplo, Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005):

$$CT = \frac{1}{2} G\rho \iint_{\sigma} \frac{(H - H_p)^2}{l^3} d\sigma \quad (01)$$

onde  $G$  é a constante da gravitação universal,  $\rho$  é a densidade média da crosta terrestre (considerada como sendo  $2,67 \text{ g/cm}^3$ ),  $H$  é altitude dos pontos da grade que serão varridos pelo integrador e  $H_p$  é a altitude do ponto de cálculo.  $l$  é a distância entre o ponto na grade e o ponto de cálculo e  $d\sigma$  é o tamanho da área considerada, neste caso dada pelo tamanho do elemento digital (pixel).  $\sigma$  significa que esta integral tem que varrer toda a Terra.

Esta grade, agora representativa de valores da gravidade, pode ser integrada novamente para gerar resíduos de anomalias de altitude associadas aos dados da topografia. Para transformar estes valores em anomalias de altitude, aplica-se, por exemplo, a Integral de Molodenskii (Esta etapa é exatamente igual a etapa I, todavia efetiva com valores de Correção do Terreno), dada por exemplo por Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005):

$$T = \frac{R}{4\pi} \iint_{\sigma} \Delta g \cdot S(\psi) \cdot d\sigma; \quad \zeta = \frac{T}{\gamma} \quad (02)$$

Neste caso,  $R$  é o raio médio da Terra;  $\gamma$  é gravidade calculada no elipsóide de referência, ou o valor da gravidade obtido do campo da gravidade normal;  $\Delta g$  é a anomalia da gravidade de Molodenskii dada pela diferença entre a gravidade observada na superfície e a gravidade no teluróide;  $S(\psi)$  é a função de Stokes, que depende da distância angular entre o ponto de cálculo da anomalia de altitude e o ponto onde encontra-se a anomalia da gravidade; Os significados para  $\sigma$  e  $d\sigma$  são análogos aos da (01).

De forma direta, então, têm-se os valores de anomalia de altitude associados somente ao Modelo Digital de Elevação, sem a subtração ou regularização de grades.

Se os referenciais horizontais são os mesmos, então a compatibilização das resoluções pode ser

efetivada mediante uma injunção na posição de uma ou mais células na grade cujo referencial se deseja manter. Esta injunção pode ser obtida do seguinte modo:

- I - Tome-se um conjunto de células do modelo de maior resolução até que este conjunto seja compatível com uma única célula de posição média equivalente no modelo de menor resolução;
- II - Assume-se o valor digital da célula cuja posição média foi escolhida na etapa anterior como sendo a referência para os cálculos seguintes;
- III - Utilizam-se os valores digitais de resolução melhorada para preencher os valores digitais, ou em linha, ou em coluna, ou em ambos, do modelo inicial de menor resolução, dois a dois, tomando como origem o valor de referência da etapa II. Nesta etapa, modelos mais elaborados, como oriundos de funções *wavelet*, vêm sendo construídos pelo Laboratório de Referenciais Geodésicos e Altimetria por Satélites (LARAS) da Universidade Federal do Paraná (UFPR).

As operações de I a III enunciadas estão representadas respectivamente nas Figuras 3 e 4.

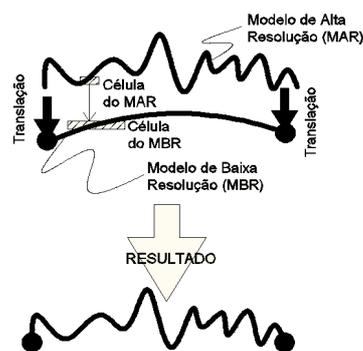


Figura 3 – Representação da Translação do modelo de alta resolução até o modelo de baixa resolução na forma física.

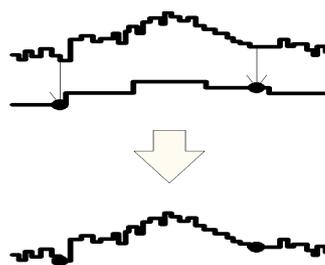


Figura 4 – Representação da Translação do modelo de alta resolução até o modelo de baixa resolução na forma digital.

Cada célula não corresponde a um único afastamento entre as superfícies de menor e maior resolução. Assim, não é possível fazer uma estimativa de translação unívoca para todos os elementos digitais das matrizes - algum ajustamento será necessário.

Na medida em que se percorre a matriz de referência, preenche-se todo o modelo de menor resolução criando-se células digitais intermediárias até que todos os valores de resolução melhorada sejam utilizados. Então, o

pior erro que se pode cometer é aquele devido à estimativa da posição média tomada como sendo igual a uma única célula no modelo de melhor resolução. Este erro, todavia, pode ser corrigido no final por simples translações entre células de matrizes a partir do conhecimento de pontos notáveis quando comparados com pontos levantados em campo ou ainda linhas bem delimitadas em ambos os modelos. Ressalte-se que, mesmo com toda a tecnologia disponível, a hipótese de observar valores melhores que a resolução fornecida pelo instrumento de observação requerem, em geral, tanto tempo de trabalho quanto o que se deseja minimizar neste desenvolvimento e por isso tal hipótese foi rejeitada.

Ao final do processo, têm-se a expectativa de um modelo com longos e curtíssimos comprimentos de onda e as etapas D, E, F, H e J foram, de certo modo, contempladas. Necessita-se ainda a compatibilização com um modelo intermediário que seja representativo dos médios comprimentos de onda traduzido por observações gravimétricas esparsas na região de trabalho.

Considere-se as conversões entre quantidades físicas e geométricas como já efetuadas. Tome-se novamente o exemplo da Figura 2 como referência e a primeira linha e a primeira coluna de cada modelo como sendo compatíveis entre si. O resultado é apresentado na Figura 3, à esquerda, se o sistema coordenado for aquele apresentado na Figura 3, à direita.

2	3	6	7	6	8	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
8	5	4	5	6	7	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
8	7	6	6	4	5	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
8	6	6	4	8	3	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	4	2	6	1	2	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
3	4	5	4	3	1	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Figura 3 – Resultados (à esquerda) orientação utilizada (à direita).

O resultado, sem levar em conta modelos mais complexos (neste caso a operação é linear) baseou-se no seguinte raciocínio:

- I - Tomou-se a primeira linha (de cima para baixo) e coluna (da esquerda para a direita) de cada modelo como sendo amostras de um mesmo ponto, ou seja, considerou-se que tivessem a mesma posição espacial para um valor digital de uma determinada quantidade associada ao espaço do geopotencial - as conversões entre quantidades físicas e geométricas já foram realizadas neste estágio;
- II - Ajusta-se uma função (e/ou superfície) capaz de descrever todas as translações entre ambos os modelos;
- III - No MDE foram feitas diferenças de todos os valores digitais em relação ao valor de referência da célula escolhida como sendo aquela compatível espacialmente, a célula (1,1). Por exemplo, na célula (2,1) têm-se o valor digital 2. Como o valor digital da célula de referência (1,1) é 1, obtém-se  $2-1=1$ ;

IV - Somam-se todas as diferenças obtidas da etapa anterior com o valor da grandeza no espaço do geopotencial da célula de referência do MGG (neste caso, igual a 2). Obtém-se, para o exemplo, o valor  $2+1=3$  para a célula (2,1);

V - Com a equação ou superfície descrita na II desta seção predizem-se todos os valores entre pontos homólogos até se chegar na resolução do melhor modelo.

E o exemplo anterior pode ser generalizado tanto para matrizes de ordem superior como para modelos mais complexos, uma vez que redistribuição das informações é função somente da disposição das células de referência em ambos os modelos.

## 1.2 Compatibilização de um modelo consistente de longos e curtíssimos comprimentos de onda com um modelo derivado de observações gravimétricas locais

Todas as quantidades calculadas ou obtidas anteriormente dos modelos são agora anomalias de altitude. Os médios comprimentos de onda, ou seja, os comprimentos de onda associados às observações locais, no entanto, são ainda obtidos por observações gravimétricas. Inicialmente é necessário, portanto, a transformação destas quantidades para que sejam anomalias de altitude, compatíveis com as idéias apresentadas. Esta transformação é dada pela Equação Fundamental da Geodésia Física, dada, por exemplo, por Hofmann-Wellenhof & Moritz (2005):

$$\Delta g = -\frac{\partial T}{\partial h} + \frac{1}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial h} T \quad (03)$$

aqui,  $T$  é o potencial perturbador que pode ser transformado em anomalia de altitude via a Equação de Bruns (e.g. HOFMANN-WELLENHOF & MORITZ, 2005) e  $h$  é a altitude elipsoidal do ponto em questão.

Então, repete-se o procedimento descrito pela (03). Este preenchimento é, novamente, somente função da posição dos elementos nas grades do modelo conhecido e do modelo a ser obtido.

## 3 VANTAGENS EM MODIFICAR-SE A TÉCNICA ORIGINAL

a) Controle da Contaminação do Sinal: Como cada etapa contempla separadamente diferentes magnitudes de anomalias de altitude, é possível estimar a qualidade de cada produto separadamente. Assim, embora não se consiga evitar a mistura de componentes espectrais de cada modelo no resultado final, pode-se estimar qual a magnitude do efeito de cada uma delas;

b) Minimização das etapas: As etapas de regularização, reamostragem e subtração das grades não estão mais presentes;

c) Conservação da qualidade original das observações: quando subtraem-se as anomalias da gravidade que foram obtidas a partir de observações

locais de anomalias da gravidade provenientes de um modelo global, restam resíduos que são operados com Correções do Terreno. Estas anomalias da gravidade, que são informações em pequena escala, muito precisas relativamente, se transformam em informações pouco precisas (relativamente) porque os modelos de baixa resolução não são capazes de contemplar a informação espacial numa mesma escala. Quando se preservam as informações nos seus pontos de origem, este problema não ocorre mais. Todas as informações adquiridas são estritamente mantidas e controladas pelos pontos de observação homólogos;

d) Em vista da tendência em se manter sempre o modelo de melhor resolução como sendo representativo dos dados, o resultado final apresenta informações de detalhe que são plenamente distinguíveis para comparação com resultados de outros modelos.

#### 4 RESULTADOS PRELIMINARES

Preliminarmente, considerou-se um afastamento unívoco entre as grades do EGM2008 e o Modelo Digital de Elevação (MDE) ASTER GDEM (TACHIKAWA et al., 2011) para região do Datum Vertical Imbituba. O MDE está apresentado na Figura 4, abaixo, com uma resolução espacial de 30 segundos de arco:

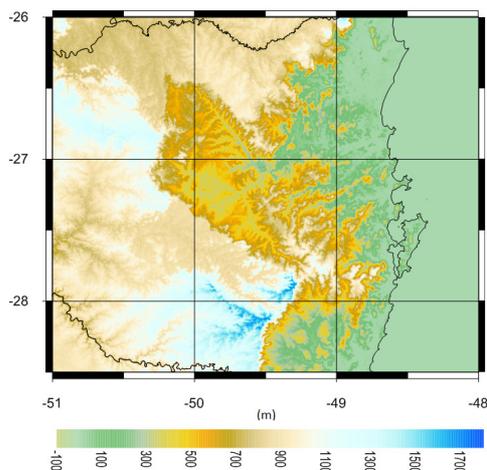


Figura 4 – DEM ASTER GDEM para a região do Datum Vertical Imbituba.

Da integração das (01) e (02), resultou -se a grade de anomalias de altitude, representada na Figura 5. Nesta figura há uma região sem dados (em branco), conseqüência do filtro de borda aplicado (a faixa extra de dados para o processamento foi prevista somente para menores latitudes e longitudes). Do EGM2008 para a mesma região, obteve-se a grade de anomalias de altitude apresentada na Figura 6 com aproximadamente 5' de arco em resolução espacial.

Após reamostrar a grade do EGM2008 utilizando krigagem ordinária (ISAAKS & SRIVASTAVA, 1989) uma resolução compatível com as anomalias de altitude oriundas do MDE ASTER (com resolução 30") foi obtida. Esta grade não é apresentada no trabalho e é chamada

resultado EGMream30seg. Associando-se os limites da quadrícula dos resultados apresentados na Figuras 5 e EGMream30seg como sendo os mesmos para depois somá-los, tem-se o resultado final segundo a metodologia na forma linear, apresentado na Figura 7.

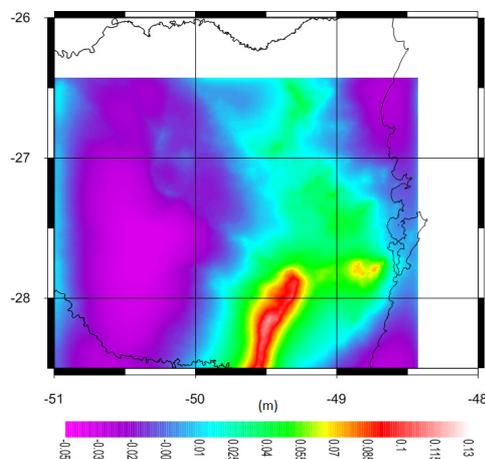


Figura 5 – Anomalias de altitude calculadas com a (01) a partir do MDE ASTER GDEM.

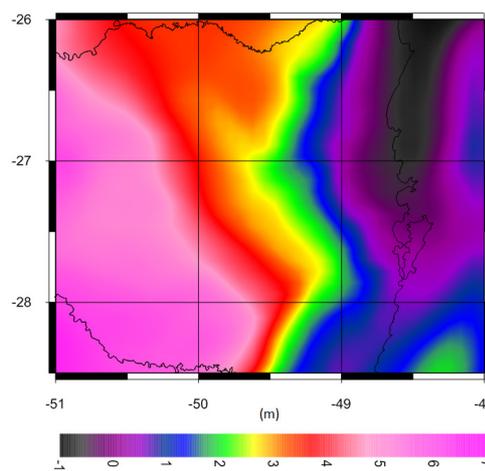


Figura 6 – Anomalias de altitude oriundas do EGM2008 para a região do DVB Imbituba.

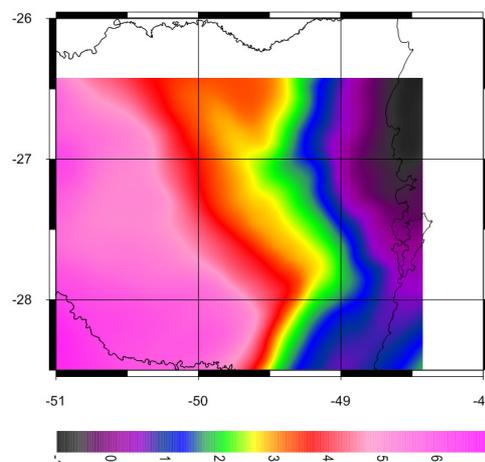


Figura 7 –EGM2008ream30seg mais anomalias de altitude obtidas do ASTER GDEM; Escala em metros.

Uma avaliação no Brasil deste resultado pode ser feita via a comparação com o MAPGEO2010 (IBGE, 2012). A diferença entre o resultado apresentado na Figura 7 e o MAPGEO2010 é apresentada na Figura 8.

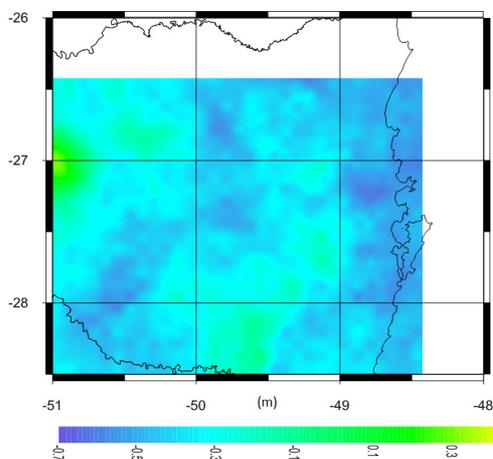


Figura 8 – Diferença entre a metodologia proposta e o MAPGEO2010.

Como os médios comprimentos de onda não foram contemplados, uma diferença global só pode ser estimada analiticamente, valendo-se da idéia da metodologia remove-restore nas (04) e (05):

$$\Delta g_{residual} = \Delta g_{obs} - \Delta g_{MGG} + TC \quad (04)$$

$$N_{FINAL} = N_{residual} + N_{MGG} \quad (05)$$

Todas as anomalias da gravidade  $\Delta g$  apresentadas neste trabalho estão no contexto da Teoria de Molodenskii.

Destaque-se que comprimentos de onda intermediários não estão explícitos na (06) porque não estão disponíveis as anomalias da gravidade observadas  $\Delta g_{obs}$ , que irão refletir aspectos de heterogeneidades regionais de densidades não resolvidas pela  $TC$ . Este operação difere do caso em que se conhece os médios comprimentos de onda, quando a integração é feita somente sobre uma capa esférica em torno do ponto de cálculo. Portanto, os únicos resíduos possíveis aqueles da própria grade dos curtíssimos comprimentos de onda, neste caso variando de -13 até 5 cm, suficientemente razoáveis para qualquer obra de Engenharia. De forma rigorosa, a mesma análise deve ser feita via a observação de valores da gravidade na região de estudos.

## 5 CONCLUSÕES

As operações apresentadas aqui não levaram em conta os médios comprimentos de onda do Geopotencial derivados de anomalias da gravidade obtidas regionalmente. Também, não ajustou-se qualquer afastamento entre pixels: simplesmente tomou-se os cantos das quadrículas de cada grade como sendo os mesmos.

Embora com o vazio espectral, obteve-se um modelo local do quase-geóide em somente quatro operações: 1) a conversão de altitudes em correções do terreno; 2) a conversão de correções do terreno em anomalias de altitude; 3) a reamostragem de uma grade de baixa resolução (o EGM2008) e, 4) a soma da grade EGM2008 reamostrada com a grade de anomalias de altitude. Esta concepção exige um número muito menor de operações relativamente ao cálculo do geóide na sua forma clássica, que envolve geração de anomalias da gravidade free-air em Bouguer, interpolação, retransformação das anomalias Bouguer em anomalias da gravidade Free-air, dentre várias outras operações que envolvem a subtração, compatibilização e soma de diferentes grades. Esta é a principal contribuição deste desenvolvimento.

Também, embora apresentados com ênfase na metodologia, aqui não são ajustados valores digitais entre pontos homólogos, que devem representar ruído adicional. São objetos futuros de estudo a integração dos dados entre as grades a partir de funções *wavelet*, a partir de funções da decomposição espectral dos dados e com a CMQ.

## REFERÊNCIAS

- BORRE, K. **Mathematical Foundation of Geodesy**. New York: Springer, 2006.
- FERREIRA, V.G. **Solução do tipo Brovar para o Segundo Problema de Valor de Contorno da Geodésia com vistas à modernização de sistemas de altitudes**. 2011. Tese de Doutorado - Universidade Federal do Paraná, Curitiba.
- HOFMANN-WELLENHOF, B.; MORITZ, H. **Physical Geodesy**. Bad Vöslay: Springer, 2005.
- IBGE. **Modelo de Ondulação Geoidal**. Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística. Disponível em < [http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/modelo\\_geoidal.shtm](http://www.ibge.gov.br/home/geociencias/geodesia/modelo_geoidal.shtm)>. Acesso em 18/05/2012.
- ISAAKS, E. H.; SRIVASTAVA, R. M.; **An Introduction to Applied Geostatistics**. New York: Oxford University Press, 1989, 561 pp.
- LEHMANN, R. **Altimetry-gravimetry problems with free vertical datum**. Journal of Geodesy, no. 74: 327-334, 2000.
- TACHIKAWA, T; HATO, M.; KAKU, M.; IWASAKI, A. **The characteristics of ASTER GDEM version 2**. Disponível em < [http://www.jspacesystems.or.jp/ersdac/GDEM/ver2Validation/IGARSS2011\\_Proceeding\\_s\\_GDEM2.pdf](http://www.jspacesystems.or.jp/ersdac/GDEM/ver2Validation/IGARSS2011_Proceeding_s_GDEM2.pdf)>. Acesso em 18/05/2012.